Lokale und globale Höhenfunktionen auf elliptischen Kurven

Zimmer, Horst Günter

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 33, 1982, S.253-260

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Lokale und globale Höhenfunktionen auf elliptischen Kurven

Von **Horst G. Zimmer,** Saarbrücken

Höhenfunktionen spielen in der Theorie der elliptischen Kurven über lokalen und globalen Körpern eine wichtige Rolle. Das zeigt sich am deutlichsten im globalen Falle, der daher zunächst betrachtet werden soll.

Sei also K ein globaler Körper der Charakteristik $\neq 2, 3$ und E eine über K definierte elliptische Kurve in Weierstraß-Normalform

$$Y^2 = X^3 + aX + b \quad (a, b \in K)$$

mit Diskriminante

$$\Delta = 4a^3 + 27b^2 \neq 0$$

und absoluter Invariante

$$j = 12^3 \frac{4a^3}{\Delta}.$$

Die Höhenfunktionen sind auf der additiven abelschen Gruppe E(K) der über K rationalen Punkte der Kurve E definiert und stellen ein wichtiges Hilfsmittel z.B. beim Beweis des fundamentalen Satzes von Mordell-Weil [L1], [L2] dar. Um diesen Satz formulieren zu können, benötigen wir im Falle, daß K ein algebraischer Funktionenkörper von endlichem Transzendenzgrad über einem Körper k als Konstantenkörper ist, den Begriff der **Chow-Spur** von E bzgl. K/k. Diese ist für eine beliebige abelsche Varietät E über K definiert und besteht aus einer abelschen Varietät B über k und einem Homomorphismus σ: $B \longrightarrow E$ über K mit einer gewissen universellen Abbildungseigenschaft (s. [L1], [N]). Durch (B, σ) wird in E(K) die Untergruppe $\sigma B(k)$ festgelegt, das Bild der rationalen Punktgruppe B(k) von B über k unter σ.[1])

Satz von Mordell-Weil. Für einen

$$\left\{\begin{array}{l}\text{algebraischen Zahlkörper } K \\ \text{algebraischen Funktionenkörper } K \text{ mit Konstantenkörper } k\end{array}\right\}$$

ist die Gruppe $\left\{\begin{array}{l}E(K) \\ E(K)/\sigma B(k)\end{array}\right\}$ endlich erzeugt.

[1]) Für elliptische Kurven E über K mit über k transzendenter Invariante j, so daß E also nicht bereits über k definiert ist, gilt $B = 0$ und somit $\sigma B(k) = 0$ (s. [L1]).

Wir bezeichnen diese Gruppe mit $\overline{E(K)}$, setzen also

$$\overline{E(K)} := \begin{Bmatrix} E(K) & \text{im Zahlkörperfalle} \\ E(K)/\sigma B(k) & \text{im Funktionenkörperfalle} \end{Bmatrix}.$$

Dann liefert der Mordell-Weilsche Satz eine Zerlegung von $\overline{E(K)}$ als direkte Summe

$$\overline{E(K)} = \overline{E(K)}_{tor} \oplus \overline{E(K)}_{fr}$$

der **Torsionsgruppe** $\overline{E(K)}_{tor}$ von $\overline{E(K)}$, also der (endlichen) Gruppe der Punkte endlicher Ordnung von $\overline{E(K)}$, und einer freien Untergruppe $\overline{E(K)}_{fr}$ endlichen **Ranges** r von $\overline{E(K)}$. Durch diese Zerlegung werden zwei grundsätzliche Fragen nahegelegt.

1. Wie entscheidet man für einen gegebenen Punkt $\overline{P} \in \overline{E(K)}$, ob er Torsionspunkt ist, d.h. ob $\overline{P} \in \overline{E(K)}_{tor}$ gilt?

2. Wie entscheidet man für endlich viele gegebene Punkte $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_s \in \overline{E(K)}$, ob sie linear-unabhängig über $\mathbb{Z}$ sind, d.h. ob sie eine freie Untergruppe von $\overline{E(K)}$ vom Rang s erzeugen?

Auf die erste Frage gibt es eine Teilantwort durch den Satz von Nagell–Lutz–Cassels ([Z3], Theorem 3.1 im Zahlkörper- und Theorem 4.1 mit $\sigma B(k) = 0$ im Funktionenkörperfalle), der eine notwendige Bedingung für die Koordinaten von Torsionspunkten liefert. Die zweite Frage kann zumindest im Zahlkörperfalle durch Verallgemeinerung einer Methode von Grunewald und Zimmert [GZ], S. 105, von $\mathbb{Q}$ auf einen beliebigen algebraischen Zahlkörper K hinreichend beantwortet werden. Dazu definiert man durch geeignete Lokalisierung einen Homomorphismus der von $P_1, \ldots, P_s$ erzeugten Untergruppe von E(K):

$$\varphi\colon \langle P_1, \ldots, P_s \rangle \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

und erhält als hinreichende Bedingung für die lineare Unabhängigkeit von $P_1, \ldots, P_s$ über $\mathbb{Z}$ die Surjektivität von φ, vorausgesetzt, daß die Untergruppe $\langle P_1, \ldots, P_s \rangle$ von E(K) keine 2-Teilungspunkte, also Torsionspunkte der Ordnung 2, enthält.

Die Bedeutung der Höhenfunktionen läßt sich nun etwa anhand der Tatsache demonstrieren, daß mit ihrer Hilfe die beiden obigen Fragen durch die Angabe notwendiger *und* hinreichender Bedingungen vollständig beantwortet werden können. Wie wir noch ausführen werden, gibt es nämlich auf der Gruppe $\overline{E(K)}$ eine quadratische Form $\hat{h}$, die sogenannte **Néron-Tate Höhe,** die die verlangten Bedingungen liefert. Diese ist eine Abbildung

$$\hat{h}\colon \overline{E(K)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft

$$\text{(QF)} \quad \hat{h}(\overline{P}+\overline{Q}) + \hat{h}(\overline{P}-\overline{Q}) = 2\hat{h}(\overline{P}) + 2\hat{h}(\overline{Q}) \quad \text{für } \overline{P}, \overline{Q} \in \overline{E(K)}.$$

Aus (QF) folgt insbesondere die Eigenschaft

$$(\text{QF}_m) \quad \hat{h}(m\overline{P}) = m^2 \hat{h}(\overline{P}) \quad \text{für } \overline{P} \in \overline{E(K)},\ m \in \mathbb{N}.$$

Diese Höhenfunktion $\hat{h}$ stellt auf $\overline{E(K)}$ eine positiv-semidefinite quadratische Form dar und liefert durch die Festsetzung

$$\beta(\bar{P},\bar{Q}) := \frac{1}{2}\{\hat{h}(\bar{P}+\bar{Q}) - \hat{h}(\bar{P}) - \hat{h}(\bar{Q})\} \quad \text{für } \bar{P},\bar{Q} \in \overline{E(K)}$$

auf $\overline{E(K)}$ eine symmetrische Bilinearform.

Die Antwort auf Frage 1 wird nun durch folgende Proposition ([N], Proposition 15, S. 304) gegeben.

Proposition 1. Ein Punkt $\bar{P} \in \overline{E(K)}$ ist genau dann Torsionspunkt, wenn auf ihm die Néron-Tate Höhe $\hat{h}$ verschwindet:

$$\bar{P} \in \overline{E(K)}_{tor} \Leftrightarrow \hat{h}(\bar{P}) = 0.$$

Somit lassen sich die quadratische Form $\hat{h}$ und die Bilinearform β auf die Faktorgruppe $\overline{E(K)}/\overline{E(K)}_{tor}$ fortsetzen, und $\hat{h}$ stellt auf dieser Faktorgruppe eine positiv-definite quadratische Form und β eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform dar.

Ist $\qquad \overline{E(K)}_{fr} = \langle \bar{P}_1,\ldots,\bar{P}_r \rangle,$

bilden die Punkte $\bar{P}_1,\ldots,\bar{P}_r \in \overline{E(K)}$ also eine freie Basis von $\overline{E(K)}$, so nennt man den Betrag der nicht-verschwindenden Determinante

$$R := |\det(\beta(\bar{P}_\lambda,\bar{P}_\nu))_{\lambda,\nu=1,\ldots,r}|$$

den **Regulator** der elliptischen Kurve E über K. Natürlich ist R unabhängig von der Auswahl der zugrundegelegten Basis.

Die Antwort auf Frage 2 (und gleichzeitig eine Rechtfertigung der Definition des Regulators) wird gegeben durch die folgende

Proposition 2. Endlich viele Punkte $\bar{P}_1,\ldots,\bar{P}_s \in \overline{E(K)}$ sind genau dann linear-unabhängig über $\mathbb{Z}$, wenn ihre Determinante nicht verschwindet:

$$\det(\beta(\bar{P}_\lambda,\bar{P}_\nu))_{\lambda,\nu=1,\ldots,s} \neq 0.$$

Der Beweis kann durch Fortsetzung von $\hat{h}$ und β zu einer positiv-definiten quadratischen Form bzw. einer nicht-ausgearteten symmetrischen Bilinearform auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{E(K)}$ geführt werden (s. [B], Chap. 9).

Für diese Anwendungen der Néron-Tate Höhe $\hat{h}$ auf der Gruppe $\overline{E(K)}$ ist es erforderlich, $\hat{h}$ berechnen zu können. Dazu sollen die anschließenden Ausführungen einige Gesichtspunkte beisteuern.[2])

[2]) Eine andere Betrachtung der Berechenbarkeit von $\hat{h}$ findet sich in der Arbeit des Vortragenden: „Generalization of Manin's conditional algorithm“, die in den Proc. 1976 ACM Sympos. on Symbolic and Algebraic Computation, Yorktown Heights, New York, 1976, 285–299, erschienen ist.

Zur Definition der Néron-Tate Höhe $\hat{h}$ auf der rationalen Punktgruppe E(K) der elliptischen Kurve E über dem globalen Körper K der Charakteristik $\neq 2, 3$ durchlaufe v ein volles System nicht-äquivalenter additiver Bewertungen von K, das der **Summenformel**

$$\sum_v \lambda_v v(c) = 0 \quad (0 \neq c \in K)$$

mit gewissen Multiplizitäten $0 \neq \lambda_v \in \mathbb{R}$ genügt. Dabei normieren wir die Bewertungen v so, daß im Zahlkörperfalle $\lambda_v = n_v$ als die lokalen Grade der zugehörigen vollständigen Hüllen und im Funktionenkörperfalle $\lambda_v = f_v$ als die Grade der Primstellen zu v von K/k gewählt werden können [Z1]. Die **Dreiecksungleichung** für v schreiben wir in der Form [Z1]

$$v(c+c') \geqq \operatorname{Min}\,\{v(c), v(c')\} + \alpha_v \quad (c, c' \in K)$$

mit

$$\alpha_v = \left\{\begin{matrix} 0 & \text{für nicht-archimedisches } v \\ v(2) & \text{für archimedisches } v \end{matrix}\right\}.$$

Durch die Weierstraß-Normalform der elliptischen Kurve E über K wird für jedes v eine reelle Zahl μ_v gemäß

$$\mu_v := \operatorname{Min}\,\{\tfrac{1}{2}v(a), \tfrac{1}{3}v(b)\}$$

festgelegt.

Wir definieren nun für einen rationalen Punkt $P = (x,y) \in E(K)$ die **lokale Weil Höhe** bzgl. v durch die Festsetzung (s. [Z1], [Z2])

$$d_v(P) := \left\{\begin{matrix} -\frac{1}{2}\operatorname{Min}\,\{\mu_v, v(x)\}, & \text{falls } P \neq 0 \\ -\frac{1}{2}\mu_v \qquad\qquad\quad , & \text{falls } P = 0 \end{matrix}\right\}$$

und damit die **globale Weil Höhe** durch Summation über die lokalen gemäß (s. [Z1], [Z2])

(S) $$d(P) := \sum_v \lambda_v d_v(P).$$

Mittels der globalen Weil Höhe wird nun die **globale Néron-Tate Höhe** auf der Gruppe E(K) durch den Limes

(L) $$\hat{h}(P) := \lim_{n \to \infty} \frac{d(2^n P)}{2^{2n}}$$

festgelegt. Dieser Limes existiert, und die durch ihn auf E(K) definierte Höhenfunktion $\hat{h}$ hat in der Tat die Eigenschaften (QF) und (QF_m) einer quadratischen Form (s. [Z1]), die im Funktionenkörperfalle auf $\sigma B(k)$ verschwindet (s. [N]).

Zur Berechnung von $\hat{h}$ ist die Formel (L) jedoch ungeeignet. Es erhebt sich daher zunächst die Frage, ob man nicht in kanonischer Weise durch eine (L) entsprechende Limesbeziehung auch aus der lokalen Weil Höhe d_v eine **lokale Néron-Tate Höhe** $\hat{h}_v$ bzgl. v auf E(K) konstruieren kann. Von einer solchen lokalen Höhenfunktion $\hat{h}_v$ wäre dann zu fordern, daß sie einer quadratischen Form möglichst nahekäme, also zu (QF) und (QF_m) analoge Eigenschaften hätte, und daß sich aus ihr die globale Néron-Tate Höhe $\hat{h}$ auf E(K) durch Summation über alle Bewertungen v in Analogie zu (S) ergäbe. Zusätzlich sollten die lokalen Höhenfunktionen $\hat{h}_v$ auf E(K) berechenbar sein, so daß dann auch die globale Höhenfunktion $\hat{h}$ auf E(K) berechenbar wäre.

Die Antwort auf die gestellte Frage ist affirmativ. Bereits Tate (s. [L2]) hatte gezeigt, daß es für eine elliptische Kurve E über einem Körper K mit einer Bewertung v eine im wesentlichen eindeutige Funktion $\hat{h}_v$ auf $E(K)\setminus\{0\}$ gibt mit den zu (QF) und (QF_m) analogen Eigenschaften:

$$(QF^v)\quad \begin{array}{l} \hat{h}_v(P+Q)+\hat{h}_v(P-Q)=2\hat{h}_v(P)+2\hat{h}_v(Q)+v(x_P-x_Q)-\frac{1}{6}v(\Delta) \\ \text{für } P=(x_P,y_P),\ Q=(x_Q,y_Q)\in E(K) \text{ mit } P,Q,P\pm Q\neq 0 \end{array}$$

und

$$(QF^v_m)\quad \begin{array}{l} \hat{h}_v(mP)=m^2\hat{h}_v(P)+\frac{1}{2}v(\psi_m^2(x_P))-\frac{m^2-1}{12}v(\Delta) \\ \text{für } P=(x_P,y_P)\in E(K) \text{ und } m\in\mathbb{N} \text{ mit } mP\neq 0, \end{array}$$

wobei ψ_m die bekannten, bei der Vervielfachung von Punkten auftretenden klassischen Funktionen gemäß (s. [Z3])

$$mP=\left(\frac{\Phi_m(x_P)}{\psi_m^2(x_P)},\ \frac{\Omega_m(x_P)}{\psi_m^3(x_P)}\right)$$

sind. Tate hatte für $\hat{h}_v$ in Abhängigkeit vom Grundkörper K, der dazu als vollständig bzgl. v vorauszusetzen ist, und vom Reduktionsverhalten von E über K modulo v explizite Ausdrücke hergeleitet (s. [L2], [Z2]).

Wir konnten nun nachweisen, daß die lokale Néron-Tate Höhe $\hat{h}_v$ auf E(K) durch eine zu (L) analoge Limesbeziehung aus der lokalen Weil Höhe d_v hergeleitet werden kann, aus der die Tateschen expliziten Ausdrücke direkt folgen. Es gilt nämlich der (s. [Z2])

Satz 1. Für eine elliptische Kurve E über einem Körper K der Charakteristik $\neq 2, 3$ mit einer additiven Bewertung v existiert der Limes

$$(L^v)\qquad \hat{h}_v(P)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{d_v(2^nP)}{2^{2n}}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{v(2y_{2^{\nu-1}P})}{2^{2\nu}}\right\}+\frac{1}{12}v(\Delta)$$

für alle Punkte $P=(x_p,y_p)\in E(K)$ mit $2^nP=(x_{2^np},y_{2^np})\neq 0$, und die durch (L^v) auf E(K) definierte Höhenfunktion $\hat{h}_v$ hat die Eigenschaften (QF^v) und (QF^v_m).

Aufgrund der Eigenschaften (QF^v) und (QF^v_m) ist nun gemäß der Summenformel für die Bewertungen v eines *globalen* Körpers K sofort klar, daß sich die globale

Néron-Tate Höhe $\hat{h}$ auf E(K) aus den lokalen Néron-Tate Höhen $\hat{h}_v$ durch Summation über alle Bewertungen v von K in Analogie zu (S) ergibt (s. [Z2]):

Korollar. Für eine elliptische Kurve E über einem globalen Körper K der Charakteristik $\neq 2, 3$ ist die globale Néron-Tate Höhe $\hat{h}$ auf E(K) gemäß

$$(\hat{S}) \qquad \hat{h}(P) = \sum_v \lambda_v \hat{h}_v(P) \quad \text{für } P \in E(K) \text{ mit } 2^n P \neq 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

durch Summation über die lokalen Néron-Tate Höhen $\hat{h}_v$ gegeben, wobei für $P \in E(K)$ mit $2^n P = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ stets $\hat{h}(P) = 0$ gesetzt wird.

Was bedeutet dies nun im Hinblick auf die Frage nach der Berechenbarkeit der globalen Néron-Tate Höhe $\hat{h}$ auf E(K) im globalen Falle mittels der lokalen Néron-Tate Höhen $\hat{h}_v$? Wir haben bisher nur die der Berechnung nicht zugängliche globale Limesbeziehung (L) durch für Berechnungen ebenfalls ungeeignete lokale Limesbeziehungen (L^v) mit anschließender Summation ($\hat{S}$) ersetzt! Es ist daher interessant, daß man eine jedenfalls für approximative Berechnungen gut geeignete endliche Formel als Ersatz für die Limesbeziehung (L^v) angeben kann. Diese ergibt sich aus einer Formel von Tate (s. [M]) durch Modifikation:

Satz 2. Für eine elliptische Kurve E über einem Körper K der Charakteristik $\neq 2, 3$ mit einer additiven Bewertung v besteht zwischen der lokalen Weil Höhe d_v und der lokalen Néron-Tate Höhe $\hat{h}_v$ auf E(K) für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$(\hat{S}_n) \qquad \begin{aligned} \hat{h}_v(P) &= d_v(P) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d_v(2^\nu P) - 4 d_v(2^{\nu-1}P) - v(2y_{2^{\nu-1}P})}{2^{2\nu}} \\ &\quad + \frac{\hat{h}_v(2^n P) - d_v(2^n P) - \frac{1}{12} v(\Delta)}{2^{2n}} + \frac{1}{12} v(\Delta) \end{aligned}$$

für alle Punkte $P = (x_P, y_P) \in E(K)$ mit $2^n P = (x_{2^n P}, y_{2^n P}) \neq 0$.

Beweis. Nach (QF_m^v) besteht für $m = 2$ die Relation

$$\hat{h}_v(2P) = 2^2 \hat{h}_v(P) + v(2y_P) - \frac{1}{4} v(\Delta),$$

und diese läßt sich auf die Form

$$(\hat{S}_1) \qquad \begin{aligned} \hat{h}_v(P) &= d_v(P) + \frac{d_v(2P) - 4 d_v(P) - v(2y_P)}{2^2} \\ &\quad + \frac{\hat{h}_v(2P) - d_v(2P) - \frac{1}{12} v(\Delta)}{2^2} + \frac{1}{12} v(\Delta) \end{aligned}$$

bringen. Aus ($\hat{S}_1$) folgt nun die behauptete Beziehung ($\hat{S}_n$) durch vollständige Induktion nach n.

Die Schnelligkeit der Konvergenz von ($\hat{S}_n$) ergibt sich aus der in [Z2], (1.12), S. 224, festgestellten Abschätzung

$$\text{(A)}\qquad \frac{1}{6}\{6\mu_v - v(\Delta)\} + \frac{5}{3}\alpha_v + \frac{1}{3}v(2) \leqq \hat{h}_v(P) - d_v(P) - \frac{1}{12}v(\Delta) \leqq -\frac{2}{3}\alpha_v,$$

die für alle $P \in E(K)$, $P \neq 0$, gilt, also insbesondere für alle $2^nP \in E(K)$ mit $2^nP \neq 0$.

Satz 2 kann in gewissem Sinne als die Zusammenfassung der Theoreme A, B, C aus [Z2], in denen die erwähnten expliziten Ausdrücke von Tate für $\hat{h}_v$ aufgeführt sind, angesehen werden. Jedenfalls ordnet sich Theorem A aus [Z2] dem hiesigen Satz 2 unter und führt zu einer wesentlichen Vereinfachung der Formel $(\hat{S}_n)$:

Korollar. Für eine elliptische Kurve E mit potentiell guter Reduktion modulo v über einem Körper K der Charakteristik $\neq 2, 3$ mit einer nicht-archimedischen additiven Bewertung v derart, daß der Restklassenkörper von K modulo v ebenfalls eine Charakteristik $\neq 2, 3$ besitzt, besteht zwischen der lokalen Weil Höhe d_v und der lokalen Néron-Tate Höhe $\hat{h}_v$ auf E(K) die Beziehung

$$\hat{h}_v(P) = d_v(P) + \frac{1}{12}v(\Delta).$$

Beweis. Die Behauptung stimmt – wie gesagt – mit der Aussage von Theorem A aus [Z2] überein. Sie läßt sich hier jedoch leicht aus Satz 2 folgern. Die Voraussetzung, daß E potentiell gute Reduktion modulo v haben soll, läuft nämlich auf die Bedingung $v(j) \geqq 0$ hinaus, und diese ist gleichbedeutend mit der Relation $v(\Delta) = 6\mu_v$, wobei die Charakteristikvoraussetzungen ausgenutzt werden. Aufgrund dieser Voraussetzungen ist auch $v(2) = 0$ und wegen der Nicht-Archimedizität von v zudem $\alpha_v = 0$. Dann liefert aber die oben angegebene Abschätzung (A) die Relation

$$\hat{h}_v(2^nP) - d_v(2^nP) - \frac{1}{12}v(\Delta) = 0.$$

Nach (2.1.2), (2.1.3) aus [Z2] gilt zudem allgemein die zu (A) analoge Abschätzung

$$\text{(B)}\qquad \frac{1}{2}\{6\mu_v - v(\Delta)\} + 5\alpha_v + v(2) \leqq d_v(2^\nu P) - 4d_v(2^{\nu-1}P) - v(2y_{2^{\nu-1}P}) \leqq -2\alpha_v,$$

in der wiederum die Schranken verschwinden, so daß für alle $\nu \in \mathbb{N}$ auch

$$d_v(2^\nu P) - 4d_v(2^{\nu-1}P) - v(2y_{2^{\nu-1}P}) = 0$$

ist. In der Formel $(\hat{S}_n)$ aus Satz 2 sind somit auf der rechten Seite die beiden mittleren Glieder gleich 0, und es ergibt sich für $\hat{h}_v(P)$ der im Korollar behauptete Ausdruck.

Die Theorem A aus [Z2] verallgemeinernde Formel $(\hat{S}_n)$ gilt in allen drei in [Z2] betrachteten Fällen A, B und C und bringt in diesem Sinne die Theoreme A, B und C aus [Z2] unter ein Dach.

Abschließend sei noch bemerkt, daß eine zur in $(\hat{S}_n)$ auftretenden Summe ähnliche Bildung bereits in den globalen Formeln aus [Z1], S. 41 oben, vorkommt.

Literatur

[B] N. Bourbaki, Formes Sesquilinéaires et Formes Quadratiques. Algèbre, Livre II; Hermann, Paris 1959.

[GZ] F. J. Grunewald und R. Zimmert, Über einige rationale elliptische Kurven mit freiem Rang $\geqq 8$. J. reine angew. Math. **296** (1977), 100–107.

[L1] S. Lang, Diophantine Geometry. Interscience Publ., New York, London 1962.

[L2] S. Lang, Elliptic Curves: Diophantine Analysis. Grundl. d. math. Wiss., Bd. **231**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1978.

[M] D. Masser, Convergence of Tate's formula. Unveröffentlichtes Manuskript, Paris 1980.

[N] A. Néron, Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes. Ann. Math. **82** (1965), 249–331.

[Z1] H. G. Zimmer, On the Difference of the Weil Height and the Néron-Tate Height. Math. Z. **147** (1976), 35–51.

[Z2] H. G. Zimmer, Quasifunctions on elliptic curves over local fields. J. reine angew. Math. **307/308** (1979), 221–246.

[Z3] H. G. Zimmer, Torsion Points on Elliptic Curves over a Global Field. Manuscripta math. **29** (1979), 119–145.